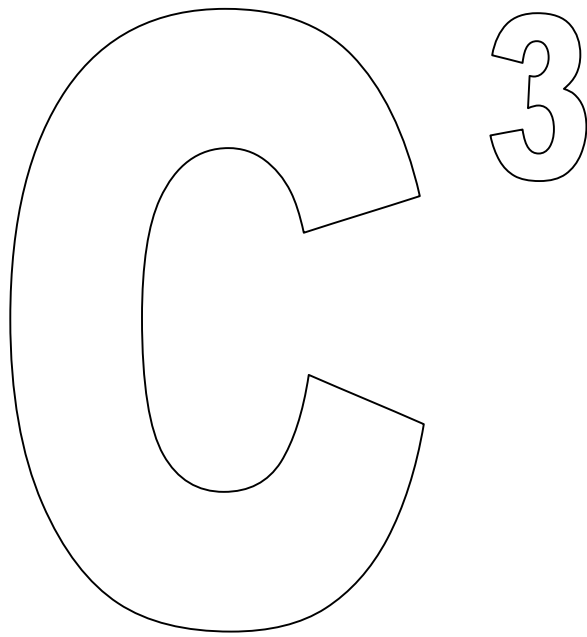


**Carlo Biasi**



**Caos Complessità Criticità**

Como, 2004

## INDICE

1	Meccanica classica	.....	pag. 1
2	Termodinamica	.....	pag. 6
3	Meccanica quantistica	.....	pag. 7
4	Complessità e caos	.....	pag. 9
5	Dalla complessità ai frattali	.....	pag. 21
6	Dal classico al complesso	.....	pag. 26
7	La legge di potenza	.....	pag. 28
8	SOC – self organized criticality	.....	pag. 31
	Complementi		
c1	Spazio delle fasi	.....	pag. 32
c2	Esponenti di Lyapunov	.....	pag. 33

## 1 Meccanica classica

Già da migliaia d'anni l'osservazione del moto del Sole e dei pianeti ha introdotto nella nostra cultura i concetti di ordine e predicibilità.

La fisica newtoniana dà una spiegazione dell'universo in termini di forze e traiettorie perfettamente calcolabili dopo aver individuato le condizioni iniziali del sistema fisico preso in esame e aver specificato la legge di evoluzione spazio-temporale delle sue variabili di stato.

L'esempio per eccellenza è la legge che lega forza e accelerazione  $F = ma$  **deterministica e reversibile**: permette cioè di calcolare tutti gli stati del sistema sia quelli precedenti che quelli futuri essendo invariante rispetto all'inversione del tempo.

Questo ha permesso di dire al famoso matematico Pierre Simon de Laplace nel 1700: *“Un'intelligenza che, per un istante dato, potesse conoscere tutte le forze da cui la natura è animata, e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, e che inoltre fosse abbastanza grande da sottomettere questi dati all'analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e quelli dell'atomo più leggero: **nulla le risulterebbe incerto**, l'avvenire come il passato sarebbero presenti ai suoi occhi. Lo spirito umano offre, nella perfezione che ha saputo dare all'astronomia, una debole parvenza di questa intelligenza.*

In ambito classico i sistemi troppo complessi vengono studiati dividendoli in sottosistemi più semplici alla portata della nostra capacità di analisi. Ad esempio i fenomeni sociali ed economici vengono spiegati in termini di comportamento umano. A sua volta, questo comportamento viene spiegato in termini di processi biologici che a loro volta sono spiegati attraverso i processi chimici, ed essi, a loro volta, da quelli fisici.

E' in questo senso che la scienza classica viene detta **riduzionista**.

Ma già nel 1903 Henri Poincarè comprese che: *“Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo nell'istante iniziale, potremmo predire con la medesima precisione la situazione dell'universo in un istante successivo. Ma quand'anche le leggi naturali non avessero più segreti per noi, potremmo conoscere la situazione iniziale **solo in modo approssimativo**. Se questa approssimazione ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, questo ci basterebbe per poter dire che il fenomeno è stato previsto, che è governato da leggi: ma non è sempre così e può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali generino differenze grandissime nei fenomeni finali; un piccolo errore nelle prime produrrebbe un errore enorme negli ultimi. La predizione diventa allora impossibile e ci troviamo di fronte al fenomeno fortuito.”*

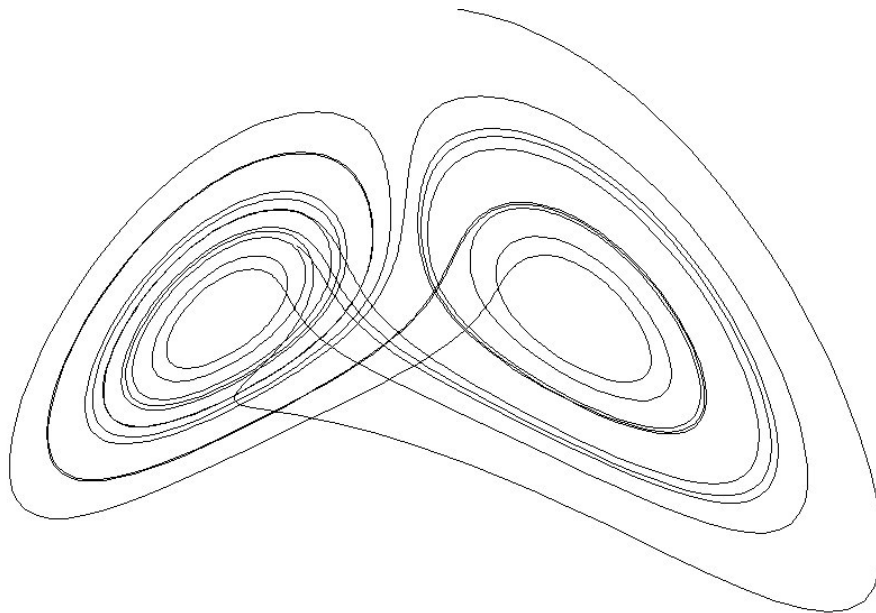
Quindi se anche trovassimo la teoria finale non potremmo comunque calcolare le conseguenze: in altri termini si può dire che un conto è spiegare un altro prevedere.

Gli studi di Poincarè dimenticati, per vari motivi, per più di 70 anni sono ritornati d'attualità quando Edward Lorenz, un fisico che si occupa di meteorologia cercò di modellizzare le correnti convettive presenti nell'atmosfera. Egli pervenne al seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned}\frac{\delta x}{\delta t} &= a(y - x) \\ \frac{\delta y}{\delta t} &= x(b - z) - y \\ \frac{\delta z}{\delta t} &= xy - cz\end{aligned}$$

Utilizzando come costanti  $a=10$ ,  $b=28$  e  $c=8/3$  e risolvendo numericamente il sistema si rese conto che per condizioni iniziali leggermente diverse (al 3° decimale) l'evoluzione temporale è completamente diversa già dopo poco tempo.

Se si analizza la traiettoria nello **spazio delle fasi** (vedere c1)( cioè lo spazio definito dalle variabili del sistema  $x,y,z$ ) si ottiene la seguente figura



Attrattore di Lorenz

dalla quale si vede un percorso irregolare senza nessuna periodicità, ma confinato in una limitata regione di spazio: queste sono le caratteristiche di quello che viene detto attrattore strano.

Se la posizione del punto iniziale venisse modificata, anche in modo così lieve da non poter essere percepita ad occhio nudo, i particolari della figura verrebbero modificati

totalmente. L'aspetto generale resterebbe lo stesso, ma i numeri di giri successivi a sinistra e a destra diventerebbero del tutto diversi.

Come ha detto Lorenz ciò si deve al fatto che l'evoluzione temporale del sistema dipende in modo estremamente sensibile dalle **condizioni iniziali**. Il numero di giri a destra e sinistra è irregolare, apparentemente aleatorio e comunque praticamente impossibile da prevedere.

E' questo un tipico esempio di comportamento caotico.

Un altro esperimento estremamente significativo circa la sensibilità alle condizioni iniziali si realizza con tre magneti disposti su un piano ai vertici di un triangolo equilatero e un pendolo formato da un filo e una pallina metallica sospeso nel baricentro del triangolo. Allontanando il pendolo dalla posizione di equilibrio e lasciandolo poi libero questo compirà una traiettoria che lo porterà a fermarsi in prossimità di uno dei tre magneti come si vede dalla seguente figura.

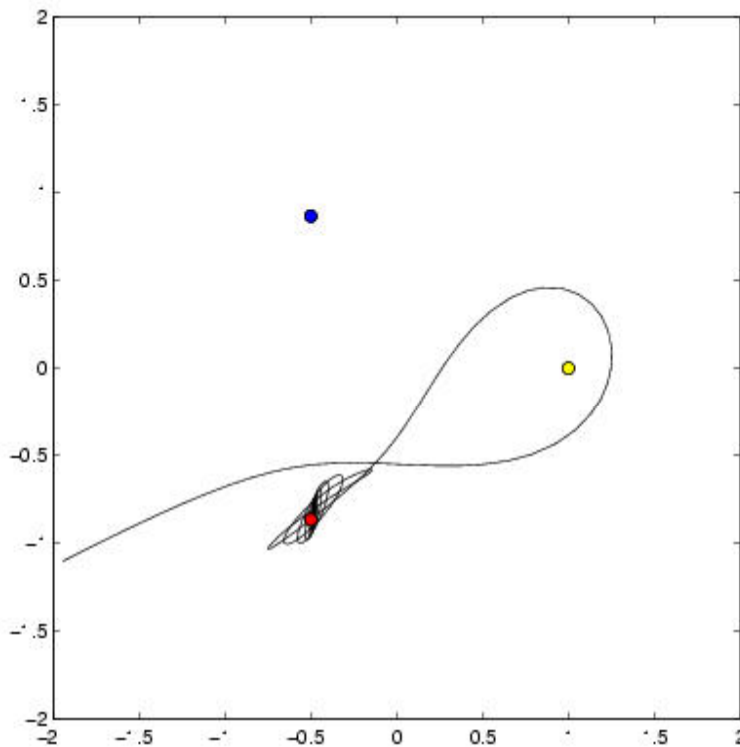


fig. 1 Traiettorie seguite dal pendolo con punto di sospensione individuato dalle coordinate 0,0.

Se identifichiamo ogni magnete con punto di diverso colore ad esempio giallo, rosso e blu e coloriamo il quadratino del piano (punto di partenza a meno dell'errore di misura) da cui è partito il pendolo con il colore del magnete su cui si è fermato ripetendo più volte l'esperimento si ottiene la seguente figura

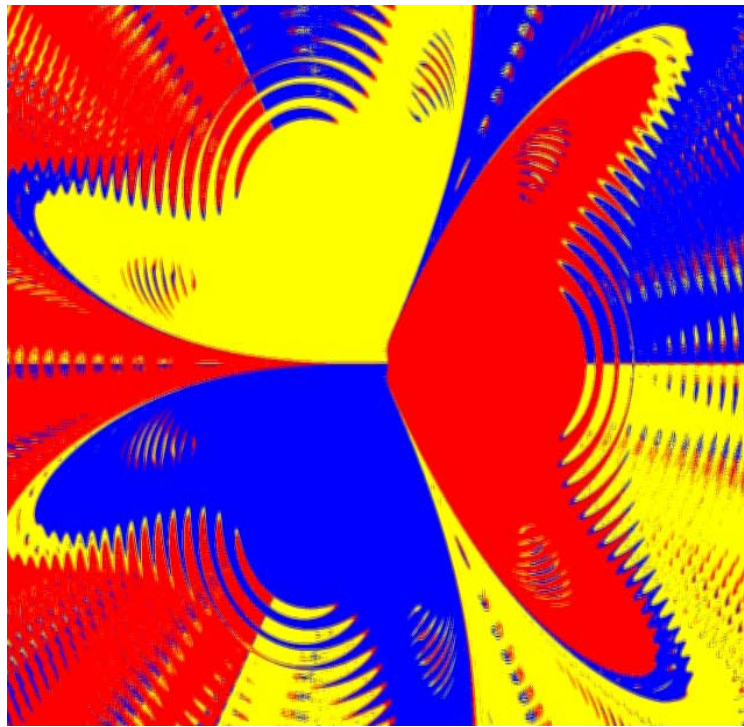


fig. 2

Riducendo l'incertezza sulla posizione iniziale, colorando cioè quadratini di dimensione inferiore si ottiene la figura 3

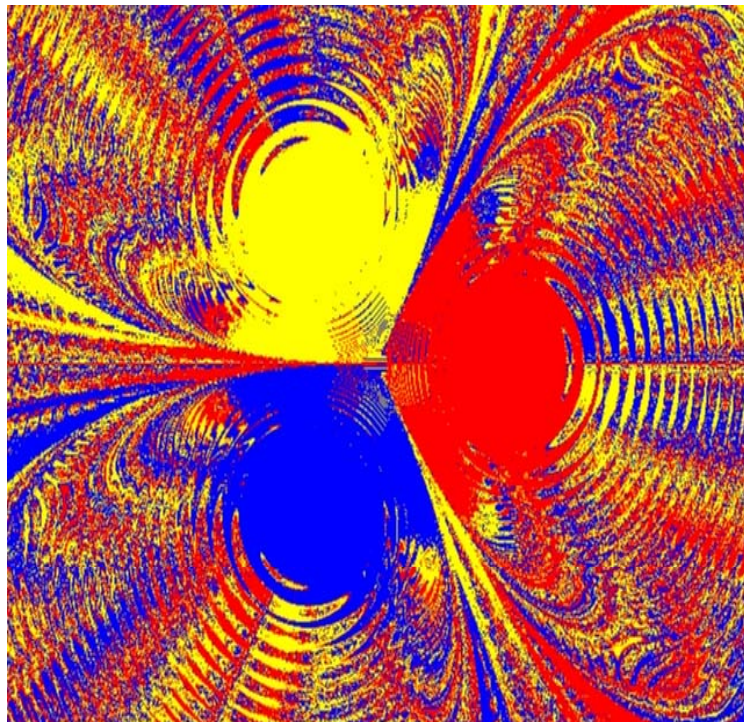


fig. 3

E' del tutto evidente il carattere **frattale** dell'immagine ottenuta e cioè che ogni zona del piano, piccola a piacere, presenta le caratteristiche dell'originale e confina con colori diversi e da ciò discende l'estrema sensibilità alle condizioni iniziali.

Quello che allora si può fare è caratterizzare le classi di proprietà dei sistemi (come l'attrattore di Lorenz) che siano generiche e non dipendano dai dettagli.

Per esempio quando l'acqua congela non si sa dove siano le singole molecole però si osserva una temperatura caratteristica, una durezza e altre proprietà. Per descrivere un gas in equilibrio è sufficiente conoscere pressione, temperatura e volume e non lo stato delle singole particelle.

## 2 Termodinamica

E' proprio dagli studi di gas (sistemi di molte particelle) in equilibrio che nell'800 si posero il problema dei limiti della meccanica classica. Infatti il 2° principio della termodinamica stabilisce che durante ogni trasformazione l'entropia aumenta e non è possibile recuperare l'energia dissipata.

Questa definizione di entropia di fine '800, che fissa una direzione per il tempo, sancisce un'irreversibilità macroscopica che non ha però riscontro se si analizza il sistema da un punto di vista microscopico.

Nei sistemi a molte particelle ogni singolo elemento ha una dinamica reversibile rispetto al tempo.

Sono stati i lavori di Maxwell e Boltzmann che hanno chiarito il paradosso stabilendo delle relazioni tra entropia, ordine e probabilità.

Questo modello, chiamato meccanica statistica, associa all'idea di ordine e disordine il concetto di livelli energetici che sono un possibile stato del sistema cioè la distribuzione di energia delle particelle.

Le configurazioni possibili (stato) del sistema dipendono dalle forze in gioco e dall'energia a disposizione. Boltzmann studiando come un sistema isolato lontano dall'equilibrio tenda spontaneamente ad aumentare il numero di stati e quindi ad aumentare l'entropia pervenne alla seguente relazione:

$$S = K \ln n$$

dove S è l'entropia, K la costante di Boltzmann e n il numero di stati possibili.

L'interpretazione di Boltzmann del 2° principio elimina la contraddizione in quanto non c'è una legge fisica che blocca il passaggio dal disordine all'ordine, ma la probabilità che ciò avvenga è estremamente scarsa.

In questo modo lo stato di equilibrio non sarebbe nient'altro che lo stato macroscopico più probabile e infatti come dice Murray Gell-Mann *“ la spiegazione dell'irreversibilità [cioè la tendenza del sistema a portarsi nello stato di equilibrio] è che ci sono più modi di mescolare chiodi o monete (.....) o molecole di azoto e ossigeno allo stato gassoso che di mantenerli separati. Nella misura in cui opera il caso, è probabile che un sistema che abbia un certo ordine si evolva verso il disordine, che offre un numero maggiore di possibilità.”*

Il limite della termodinamica è dovuto al fatto che si occupa esclusivamente di sistemi all'equilibrio mentre la maggior parte dei sistemi sono lontani dall'equilibrio e in continuo scambio di materia ed energia con l'ambiente circostante.

Vengono osservati sistemi che si formano ed evolvono lontano dall'equilibrio e si autoorganizzano in forme d'ordine complesse in contrasto con il 2° principio.

Per esempio un vortice d'acqua può resistere ( restare cioè in equilibrio) per tempi lunghi se si aggiunge continuamente altra acqua.

L'interesse per questi sistemi, detti da Ilya Prigogine strutture dissipative (perché alimentati da materia ed energia) risiede nella consapevolezza del fatto che i sistemi viventi sono strutture dissipative. Le cellule sono sistemi chimici lontano dall'equilibrio che assorbono sostanze nutritive per mantenere la loro struttura interna. Poiché la biosfera stessa è un sistema in non equilibrio regolato dal flusso della radiazione solare si capisce l'importanza di stabilire delle leggi generali per tali sistemi.

### 3 Meccanica quantistica

Parallelamente agli studi di Poincaré si stava sviluppando la meccanica quantistica (tuttora in fase di perfezionamento) e gli studi di Poincaré passarono in secondo piano sia perché gli sforzi dei fisici erano indirizzati verso il nuovo modello quantistico (e in contemporanea verso la teoria della relatività) sia perché il campo d'indagine di Poincaré, orientato ai sistemi non lineari, richiede l'uso di una matematica non ancora sviluppata o l'utilizzo di computer che allora evidentemente non c'erano.

Alla fine dell'800 i fisici si resero conto che molti fenomeni non potevano essere spiegati sfruttando le conoscenze acquisite e inquadrare nella teoria che oggi chiamiamo elettrodinamica classica.

Si sapeva ad esempio che una carica elettrica in moto doveva dissipare energia sotto forma di campo elettromagnetico e non ci si poteva quindi spiegare come gli elettroni orbitanti intorno al nucleo non collassassero su quest'ultimo per la progressiva perdita di energia. Si considerava la luce un'onda elettromagnetica e l'elettrone una particella però gli esperimenti condotti nel 1927 da Davisson e Germer e successivamente da G.P. Thomson hanno messo in luce il carattere ondulatorio dell'elettrone e l'effetto fotoelettrico, spiegato in seguito da Einstein, ha messo in evidenza il carattere corpuscolare della luce. La meccanica quantistica rappresenta il primo fondamentale cambio di paradigma in fisica.

#### • *Certezza*

La fisica classica attribuisce una realtà indubbia ed indipendente dall'atto di osservazione al mondo che ci circonda. Singoli oggetti hanno proprietà ben precise che noi possiamo osservare; magari commettiamo errori nella misura o abbiamo una conoscenza soltanto parziale di tali proprietà, ma questo è un problema nostro, non del mondo "reale".

E' possibile il ricorso ad una descrizione probabilistica della realtà, ma tale descrizione è legata ai nostri limiti; la fisica può e deve parlare di misure certe e di valori veri per una data quantità misurabile.

In meccanica quantistica non ha più senso parlare di proprietà di un sistema fisico e queste perdono ogni significato fisico; l'unica cosa descrivibile è l'atto di osservazione del sistema, che coinvolge sia il sistema stesso che l'apparato di osservazione. Il principio di indeterminazione di Heisenberg stabilisce che è impossibile conoscere contemporaneamente con precisione assoluta, ad esempio, posizione e velocità di una particella, ma più si determina in maniera precisa la posizione della particella più diventa intrinsecamente meno precisa la misura della sua velocità.

#### • *Continuità*

La fisica classica attribuisce continuità alle quantità fisiche rilevanti, quali spazio e tempo, ma anche alle quantità che ne derivano, per esempio impulso di una particella, o momento angolare o energia.

In meccanica quantistica si ha una perdita della continuità di alcune variabili osservabili; la posizione di una particella, o la sua energia o il suo momento angolare (solo per citarne alcune) possano assumere solo valori discreti. Per inciso questo fatto è alla base del nome della teoria; l'osservazione sperimentale all'inizio del secolo scorso circa la "quantizzazione" di alcune grandezze fisiche portò alla formulazione moderna della teoria che oggi conosciamo.

- *Logica*

La fisica classica si basa su una logica di tipo booleano, ovvero una logica a due valori; una certa affermazione relativa ad un oggetto fisico o è vera o è falsa.

In meccanica quantistica vi è il passaggio da una logica booleana bivalente ad una logica a più livelli; una affermazione circa un sistema fisico non dovrà essere più necessariamente o vera o falsa, esisteranno altre (infinite) possibilità.

- *Riduzionismo*

Il mondo della fisica classica è pari alla somma delle sue parti, o meglio esso può pensarsi decomponibile nella somma di sistemi locali ed indipendenti, gli “oggetti” che popolano il mondo per l'appunto.

Il riduzionismo non è più valido in ambito quantistico; non è più possibile, in determinate condizioni, descrivere realtà separate spazio-temporalmente come singoli oggetti.

E' necessaria una visione olistica della realtà.

#### 4 Complessità e caos

Da quanto detto ci si trova nell'impossibilità di prevedere il comportamento dei sistemi per due motivi:

1° indeterminismo a livello sub-atomico della meccanica quantistica che ha comunque riflessi macroscopici; si consideri ad esempio il fatto che un evento quantistico casuale può modificare una molecola di DNA;

2° per i sistemi caotici previsti da Poincarè non si è in grado di prevedere comportamenti a lungo termine.

E' solo negli ultimi 30 anni che si sono cominciati a prendere in considerazione i sistemi lontano dall'equilibrio e solo il tentare di precisare di cosa si tratta quando si parla di sistemi caotici ha portato molti fisici, matematici, biologi ecc. a proporre molte definizioni tra le quali:

- orbite complicate, aperiodiche, attrattive di certi sistemi dinamici di solito di piccole dimensioni- Philip Holmes matematico;
- sorta di ordine senza periodicità - Hao Bai Lin fisico;
- un comportamento ricorrente apparentemente casuale in un sistema deterministico (meccanicistico) - Bruce Steward matematico;
- comportamento irregolare, non predicibile, di sistemi dinamici deterministici non lineari - Roderick V. Jensen fisico;
- dinamica con entropia metrica positiva ma finita. Tradotto: un comportamento che produce informazione (amplifica piccole indeterminazioni), ma non è del tutto imprevedibile - James Crutchfield del Santa Cruz Collective;
- processo deterministico non lineare che sembra essere casuale - David H. Hsieh;
- comportamento stocastico che si verifica in un sistema deterministico, dove stocastico significa casuale e deterministico implica ordine e regolarità, sottostando a strette leggi matematiche - Ian Steward.

Quello che si evince dalle definizioni precedenti e da altre ancora è la presenza di una dinamica non lineare in cui l'effetto non è proporzionale alla causa e il sistema è fortemente dipendente dalle condizioni iniziali e, inoltre, il carattere olistico dello stesso e cioè che il sistema preso nel suo complesso si comporta in modo diverso dalla somma delle sue parti o, ancora, che presenta delle proprietà emergenti che non si potevano prevedere studiando singolarmente le sue parti.

Una possibile schematizzazione che ci permette di distinguere sistemi stabili da quelli complessi e da quelli caotici (si vedrà che un unico sistema può manifestare sia comportamento complesso sia caotico al variare di alcune condizioni) consiste nel considerare la loro evoluzione nello spazio delle fasi.

Un volume nello spazio delle fasi rappresenta l'incertezza con cui si conoscono le coordinate del punto centrato nel volume dato.

I punti appartenenti al volume iniziale  $V_i$  evolveranno in modo autonomo formando dopo un certo tempo un volume finale  $V_f$ .

Vi sono 3 possibilità:

1°)  $V_i = V_f$

2°)  $V_i > V_f$

3°)  $V_i < V_f$

Il 1° caso è quello del pendolo senza attrito oppure degli urti perfettamente elastici. Si tratta di sistemi nei quali l'energia si conserva.

Il 2° caso è quello dei sistemi retti dal 2° principio della termodinamica come ad esempio il pendolo in presenza di attrito la cui evoluzione nello spazio nelle fasi è rappresentata da una spirale poiché l'energia viene gradualmente persa e il pendolo sarà costretto a fermarsi nel punto di equilibrio.

Il 3° caso riguarda i sistemi per i quali piccole cause provocano grandi effetti. Sono i sistemi non lineari, quelli ignorati per molteplici motivi fino a pochi anni fa.

Si possono dividere in 2 categorie anche se l'appartenenza all'una o all'altra non dipende dal sistema ma dalle condizioni nelle quali si trova il sistema stesso.

Nella prima categoria possiamo mettere quei sistemi per i quali il volume nello spazio delle fasi aumenta ma rallenta progressivamente la sua crescita e quindi l'evoluzione si assesta in una struttura ben definita.

Sono i sistemi che si autoorganizzano cioè per mezzo di un processo non lineare "bilanciano" l'energia libera in entrata e l'entropia in uscita. In pratica lontano dall'equilibrio importano energia dall'ambiente circostante e la dissipano entro il sistema stesso causandone un riassetamento in uno stato caratterizzato da strutture nuove inesistenti all'equilibrio.

In genere sono rappresentati nello spazio delle fasi da attrattori che sono detti cicli limite.

L'evoluzione del sistema dinamico dipende da un insieme di parametri di controllo: per bassi valori di questi si ha la tendenza verso l'equilibrio stabile mentre per valori alti si manifesta il comportamento caotico. In una zona intermedia dei parametri di controllo il sistema trova nuovi stati e manifesta nuove proprietà del tutto inaspettate (proprietà emergenti). In questa zona dello spazio delle fasi (o, che è lo stesso, per questi valori dei parametri di controllo) si dice che il sistema è in un punto critico.

Si può dire che il meccanismo che sta alla base della complessità è l'instabilità il cui principale effetto è il manifestare biforcazioni delle orbite nell'evoluzione del sistema.

Nella seconda categoria vi sono quei sistemi per i quali il volume nello spazio delle fasi aumenta esponenzialmente. Stati nuovi diversi tra loro si presentano con frequenza talmente rapida da rendere impossibile ogni previsione nonostante le equazioni che lo descrivono siano semplici e deterministiche. Sono caratterizzati da un'estrema sensibilità alle condizioni iniziali, una piccola incertezza del punto di partenza nello spazio delle fasi porta a dinamiche evolutive completamente diverse. Le traiettorie si trovano in una regione delimitata dello spazio delle fasi e generano degli oggetti dalle proprietà frattali detti attrattori strani che combinano ordine e disordine favorendo ora l'uno ora l'altro in modo del tutto imprevedibile.

Per comprendere più chiaramente il concetto di caos e di dinamica caotica è utile considerare un modello matematico non lineare detto **mappa logistica** che descrive la dinamica di una popolazione in interazione con l'ambiente (batteri, animali, persone o comunque di qualsiasi entità in grado di riprodursi).

Questo modello dovuto a Verhulst ha raffinato la prima ipotesi di Malthus che considera la crescita di una popolazione esponenziale:

$$n(t) = n(0)e^{rt}$$

dove  $n(t)$  è la popolazione al tempo  $t$   
 $n(0)$  è la popolazione iniziale  
 $r$  è il tasso di riproduzione.

Derivando la precedente funzione si ottiene:

$$n'(t) = rn(0)e^{rt} = rn(t)$$

che si può porre in forma discreta considerando

$$n'(t) = [n(t+1) - n(t)]$$

(si ipotizzata che nell'intervallo di tempo unitario la popolazione rimanga costante) ottenendo quindi:

$$n(t+1) = n(t) + rn(t)$$

Questo modello però non prende in considerazione il fatto che l'ambiente non ha risorse illimitate e che quindi la popolazione non può crescere indefinitamente.

Verhulst ha allora introdotto un termine nella precedente equazione detto **capacità di carico** che ha il compito di bloccare la popolazione ad un certo valore massimo e di rallentarne la crescita prima che tale valore venga raggiunto.

Viene cioè introdotto un meccanismo di **retroazione** (feedback) che si oppone alla crescita esponenziale trasformando l'originaria ipotesi di Malthus nella seguente equazione:

$$n(t+1) = n(t) + rn(t)\left(1 - \frac{n(t)}{k}\right) \quad (1)$$

E' evidente che in questo modo l'equazione diventa non lineare e  $k$  rappresenta il valore massimo permesso per la popolazione infatti quando  $n(t)$  raggiunge il valore massimo ( $k$ ) il termine tra parentesi diventa 0 e  $n(t+1) = n(t)$  cioè il numero di componenti della popolazione è stazionario.

Per avere l'equazione in forma più comoda conviene operare la seguente sostituzione:

$$n(t) = k \frac{1+r}{r} x(t) \quad (2)$$

e derivando si ottiene:

$$\dot{n}(t) = k \frac{1+r}{r} \dot{x}(t)$$

che trasformata in forma discreta fornisce

$$n(t+1) - n(t) = k \frac{1+r}{r} [x(t+1) - x(t)]$$

che sostituita nella (1)

$$k \frac{1+r}{r} [x(t+1) - x(t)] = kr \frac{1+r}{r} x(t) \left( 1 - \frac{k}{r} x(t) \right) \quad \text{e quindi semplificando}$$

$$x(t+1) = x(t) + rx(t) \left( 1 - \frac{1+r}{r} x(t) \right) \quad \text{svolgendo i prodotti}$$

$$x(t+1) = x(t) + rx(t) - (1+r)x^2(t) \quad \text{raccolgendo } x(t)$$

$$x(t+1) = x(t)[1+r - (1+r)x(t)] \quad \text{raccolgendo } (1+r) \text{ si ottiene}$$

$$x(t+1) = (1+r)x(t)(1-x(t)) \quad \text{e ponendo } 1+r = \lambda \quad \text{si ha infine}$$

$$x(t+1) = \lambda x(t)(1-x(t))$$

equazione detta **mappa logistica** che descrive come evolve il numero  $x$  di elementi della popolazione nel tempo e dove:

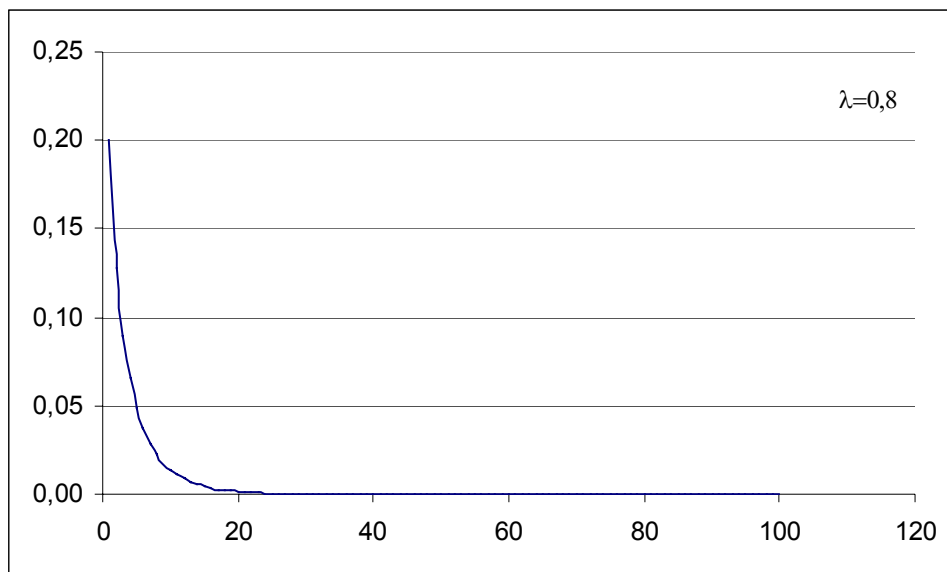
$x(t)$  rappresenta il numero di componenti al tempo  $t$ ;

$x(t+1)$  il numero di componenti al tempo  $t+\Delta t$  in cui si può porre  $\Delta t=1$  considerando che in questo intervallo di tempo la popolazione resta costante.

E' interessante iterare la mappa e tracciare il grafico n° di componenti della popolazione in funzioni delle varie iterazioni (cioè al passare del tempo per intervalli discreti) per diversi valori del parametro di controllo  $\lambda$ .

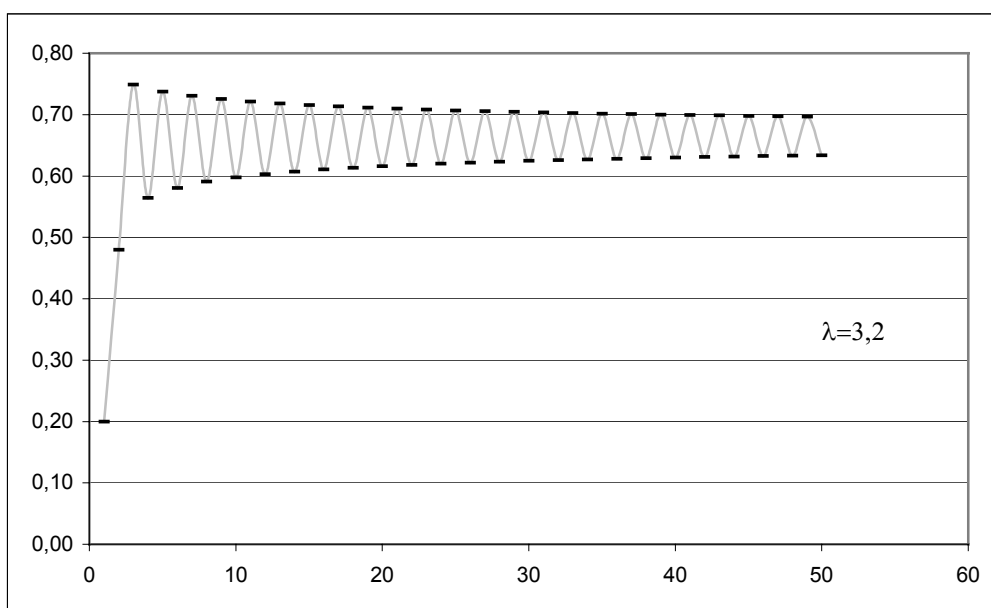
Si è posto arbitrariamente un valore iniziale della popolazione  $x(0)=0,2$  ma qualsiasi altro valore va altrettanto bene. (da notare che la sostituzione operata precedentemente ha normalizzato  $x(t)$  e che quindi  $x(0)=0,2$  significa che il valore iniziale della popolazione è il 20% del valore massimo permesso)

Per  $0 < \lambda \leq 1$  si vede dal seguente grafico che si ha l'estinzione finale della popolazione.

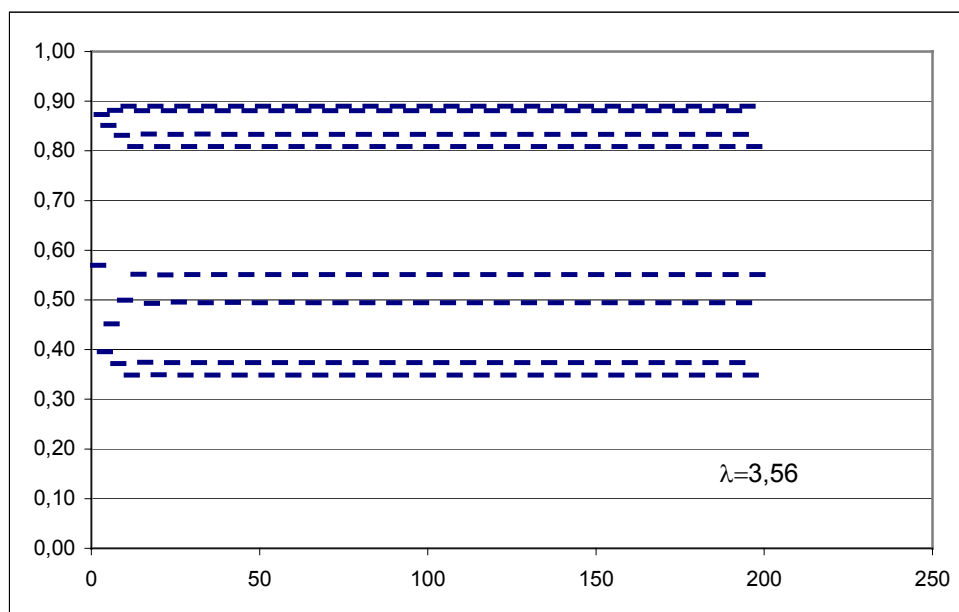
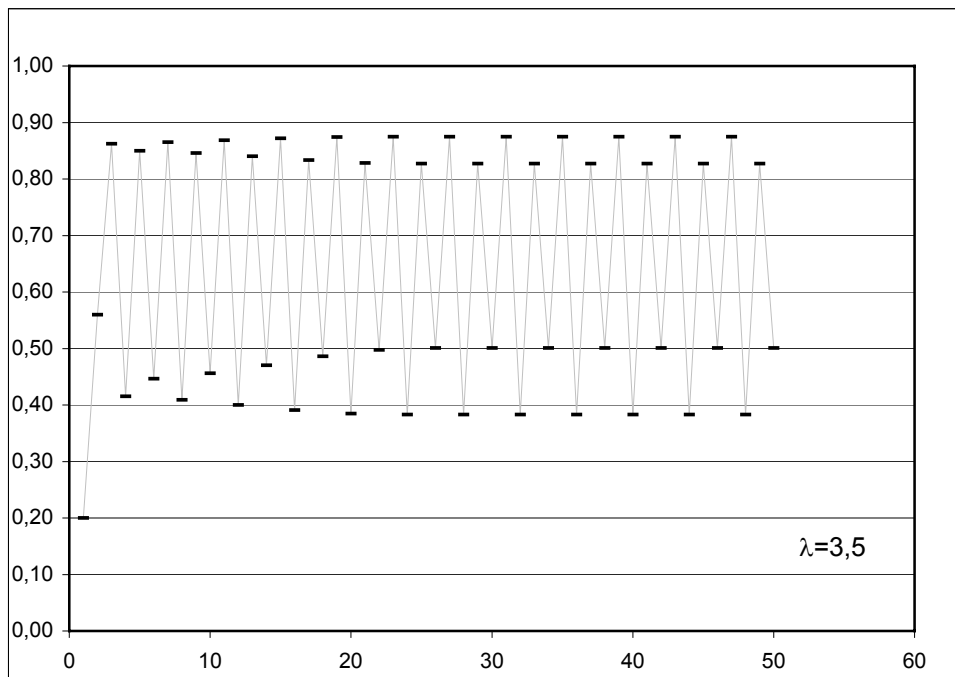


Infatti poiché  $1+r = \lambda$  ponendo  $\lambda = 0,8$  si ha  $r = -0,2$  cioè un tasso di crescita negativa.

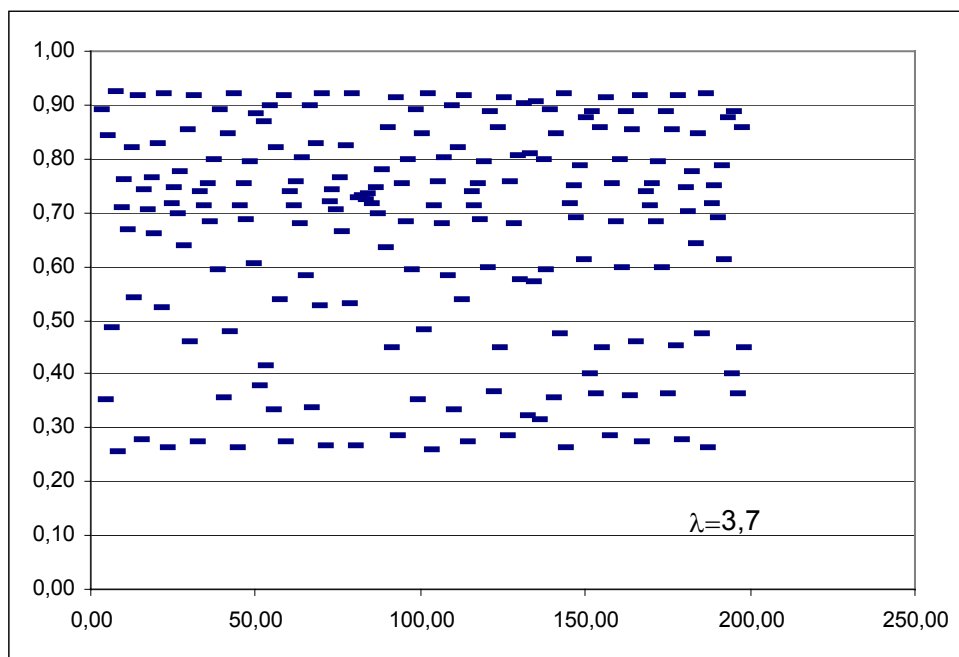
Per  $3 < \lambda \leq 1 + \sqrt{6}$  si nota un rilevante cambiamento dell'andamento. Il numero di componenti della popolazione oscilla tra due valori. Si ha quella che viene chiamata **biforcazione**: le soluzioni possibili sono due come evidenzia il seguente grafico.



Per  $1 + \sqrt{6} < \lambda < 3,56994\dots$  si assiste ad un progressivo aumento delle biforcazioni e quindi delle possibili soluzioni del modello come si vede dai seguenti grafici:

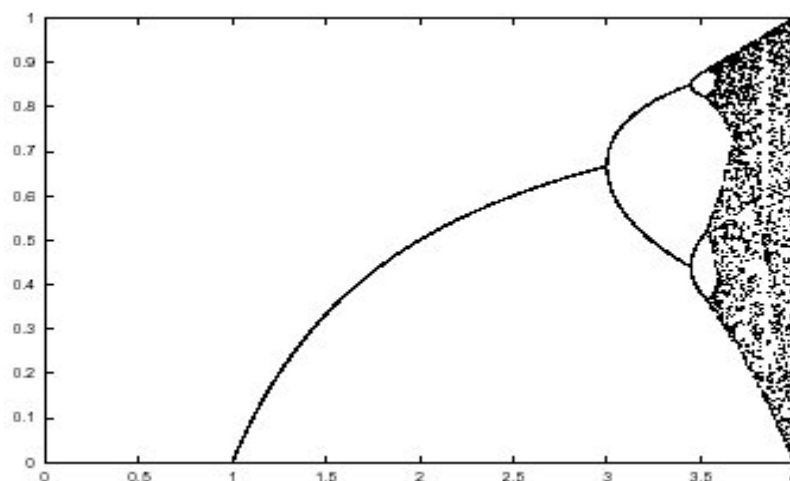


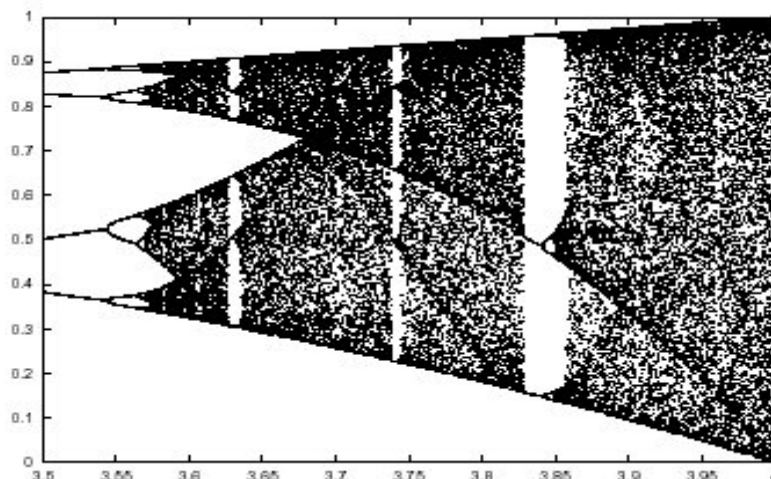
Più  $\lambda$  si avvicina al valore 3,56994... più gli stati di equilibrio non sono identificabili singolarmente. Il sistema è diventato caotico e non è più possibile alcuna previsione sullo stato finale della popolazione come si vede dal seguente diagramma.



Per visualizzare più chiaramente il passaggio del sistema da un comportamento ordinato e prevedibile ad un comportamento complesso e in seguito caotico si traccia il diagramma che riporta sull'asse y lo stato finale della popolazione e sull'asse x il valore del parametro di controllo  $\lambda$ .

Questo diagramma chiamato **albero di Feigenbaum** è riportato nella seguenti figure:

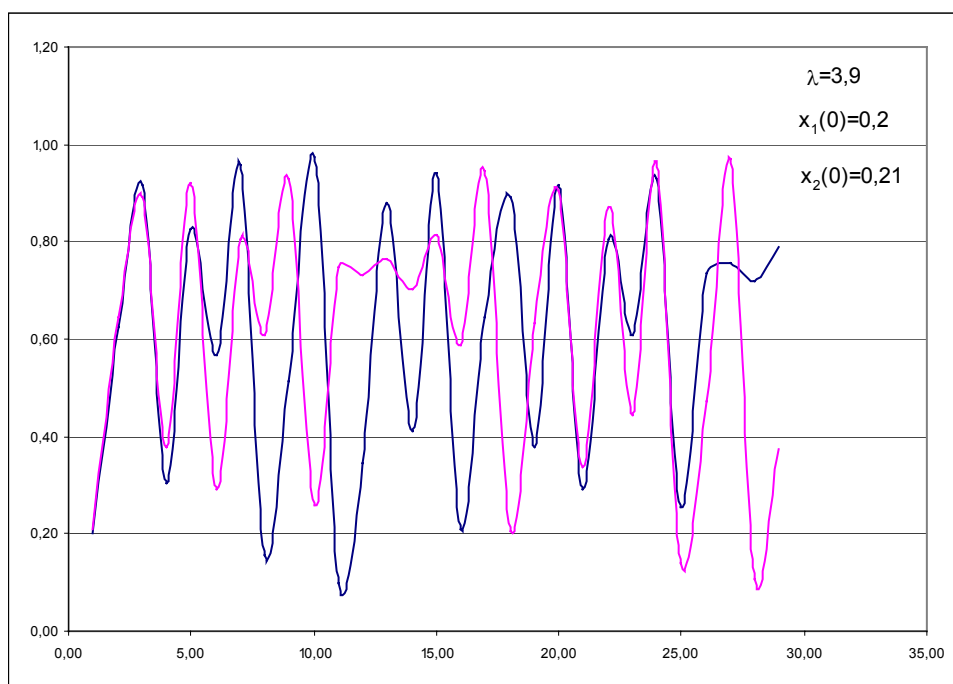




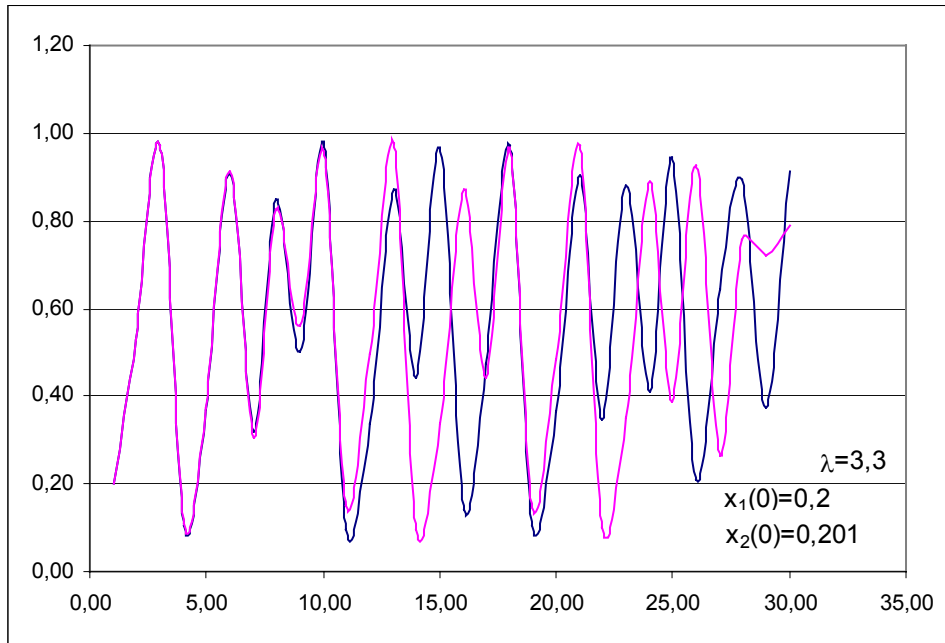
Dai due grafici precedenti si può notare come dopo una biforcazione ne segua un'altra e dopo questa un'altra ancora e così via a distanza sempre minore (costante di Feigenbaum); anche in questo caso si tratta di una struttura frattale.

Oltre alla dipendenza dal parametro di controllo  $\lambda$  è importante mettere in risalto l'estrema sensibilità alle condizioni iniziali di un sistema caotico.

Come si vede dal seguente diagramma con un valore di  $\lambda$  per il quale il sistema è già nella zona di comportamento caotico si sono tracciati gli andamenti di due popolazioni con componenti di partenza molto simili (differenza percentuale 1%) e si vede che dopo solo 5 iterazioni gli andamenti evolutivi sono molto diversi.



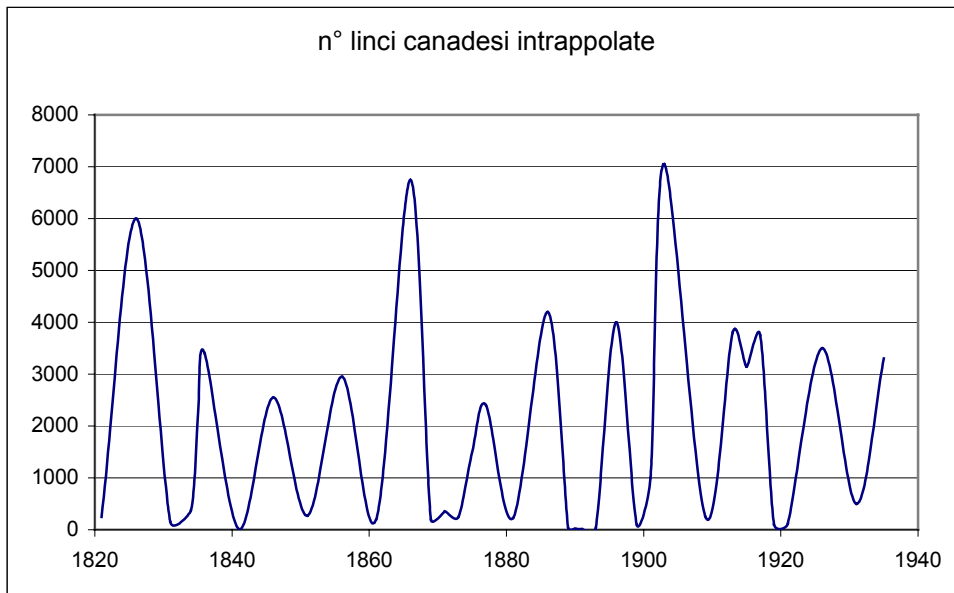
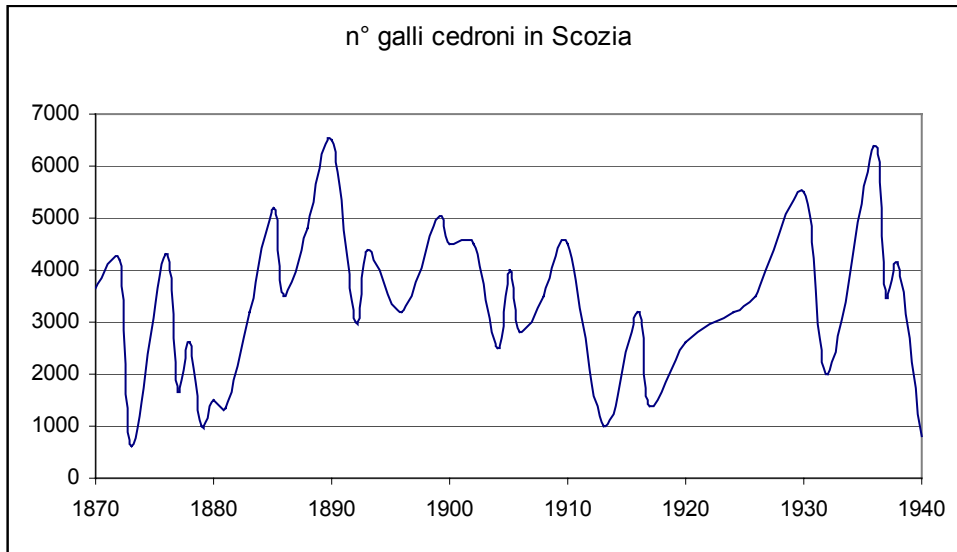
Se ora tracciamo lo stesso diagramma con  $\lambda=3,3$ , quindi non ancora nella zona caotica dell'albero di Feigenbaum, e con una differenza tra le popolazioni di solo lo 0,1% si ottengono i seguenti andamenti:



Si vede ancora in modo evidente che il sistema dipende in maniera rilevante dalle condizioni iniziali; infatti alla 15<sup>a</sup> iterazione gli andamenti evolutivi sono completamente diversi.

Semplici modelli non lineari mostrano che gli ecosistemi possono essere caotici per valori realistici dei parametri ambientali e, in effetti, alcuni dati di campo confermano questa possibilità e mostrano che molte popolazioni sono prossime al caos.

I seguenti diagrammi mostrano l'andamento di popolazioni di cui si hanno serie storiche e dalle quali si evince un andamento caotico.



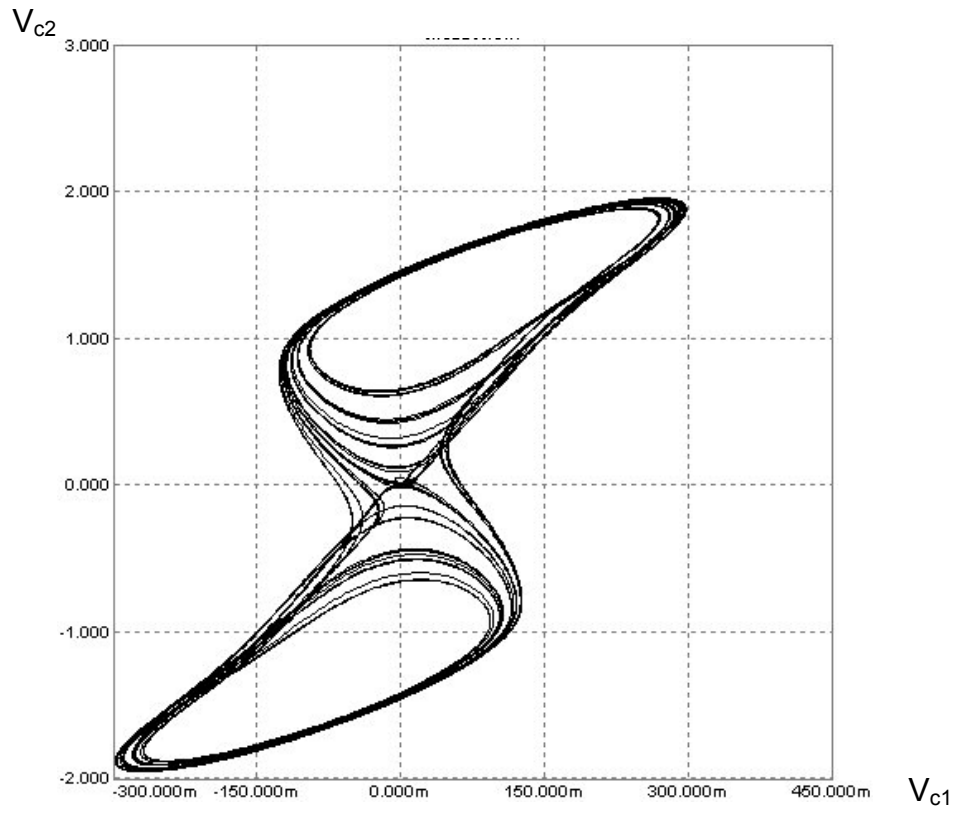
E' lecito chiedersi perché queste popolazioni evolvono verso il caos e cosa succede alla frontiera del caos per tentare di prevederne le conseguenze.

Negli ultimi anni è stata data una risposta per un ecosistema significativo; una catena alimentare a tre livelli trofici piante, erbivori e carnivori.

E' stato mostrato tramite modellizzazione che all'aumentare della quantità di piante il regime di coesistenza delle tre popolazioni passa da stazionario a ciclico e da ciclico a caotico per poi ritornare ciclico e la popolazione di livello superiore (carnivori) prima aumenta di numero ed in seguito diminuisce raggiungendo il valore massimo proprio sulla frontiera del caos.

Si può quindi dedurre che se la catena alimentare venisse sfruttata dall'uomo la massimizzazione della produzione si avrebbe regolando i parametri ambientali in modo da far funzionare la catena in prossimità del caos.





Anche in questo caso ci troviamo di fronte ad una figura frattale.

## 5 Dalla complessità ai frattali

Si consideri la seguente successione

$x_{n+1} = x_n^2 + c$  e si effettuino le seguenti sostituzioni

$$x_n = -a\left(y_n - \frac{1}{2}\right) \quad \text{quindi} \quad x_{n+1} = -a\left(y_{n+1} - \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad c = a\frac{2-a}{4}$$

si ottiene

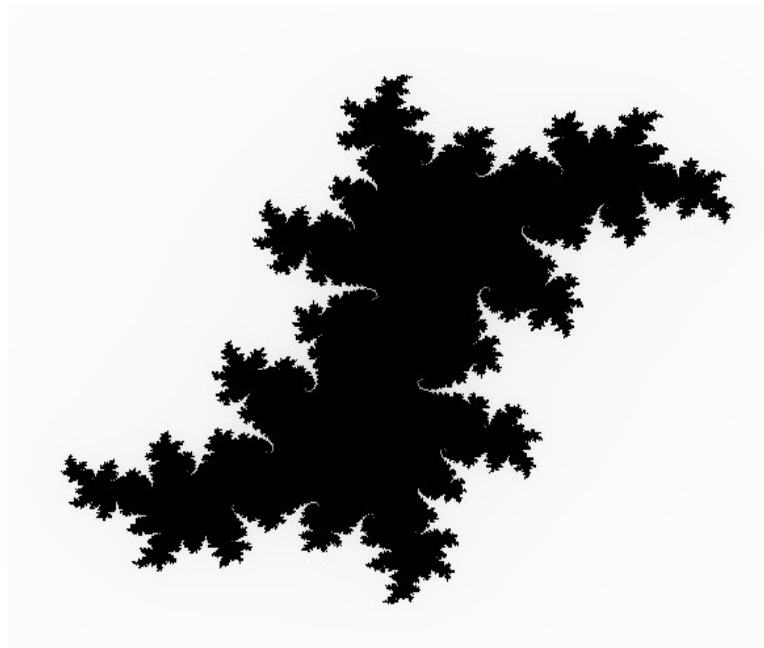
$$-ay_{n+1} + \frac{1}{2} = \left[-a\left(y_n - \frac{1}{2}\right)\right]^2 + \frac{a(2-a)}{4}$$

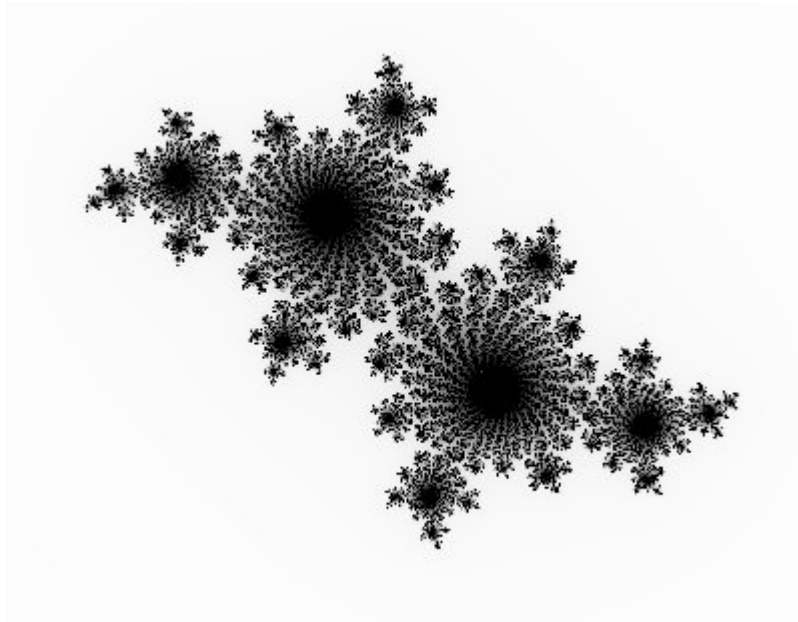
e sviluppando i conti alla fine si ha

$$y_{n+1} = ay_n(1 - y_n) \quad \text{cioè la mappa logistica.}$$

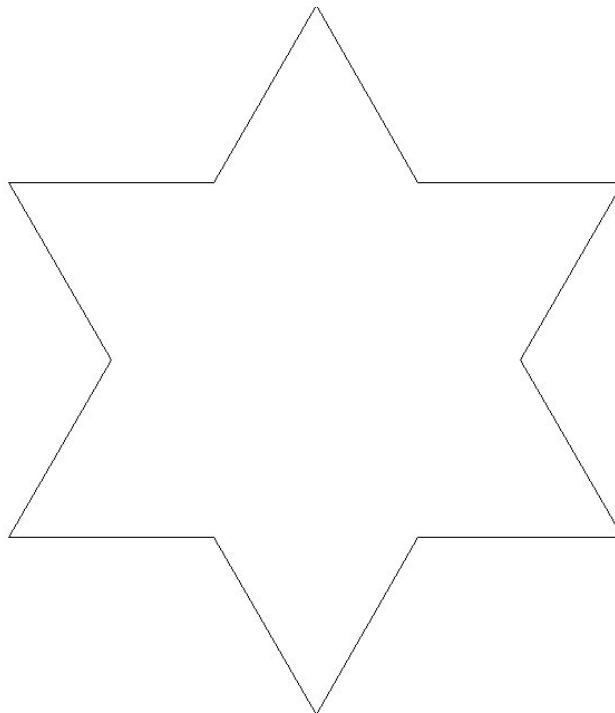
La successione  $x_{n+1} = x_n^2 + c$  è stata analizzata nei primi anni del 900 dal matematico Gaston Julia che ne ha studiato la convergenza. Per un determinato valore della costante  $c$  provò a iterare la successione partendo da diversi valori iniziali  $x(0)$ .

Quello che non riuscì a determinare, ma solo a intuire, è che la linea di confine che separa gli  $x(0)$  che convergono da quelli che divergono è estremamente frastagliata con una lunghezza infinita anche se l'insieme è limitato. Nelle seguenti figure sono riportati alcuni insiemi di Julia connessi.

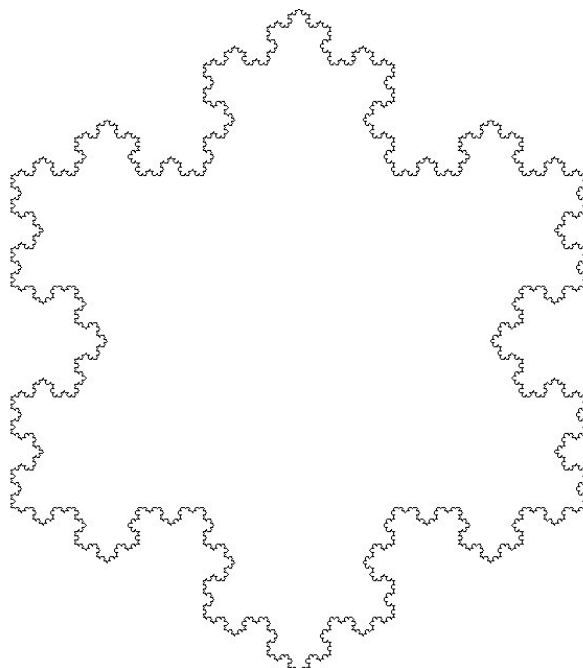




Per dare un'idea di come una regione limitata di spazio possa essere delimitata da una curva di lunghezza infinita si consideri il seguente procedimento: dato un triangolo equilatero si divide ogni lato per 3, si elimina la parte centrale e si congiungono gli estremi rimasti liberi del lato con due segmenti di lunghezza pari alla parte eliminata.



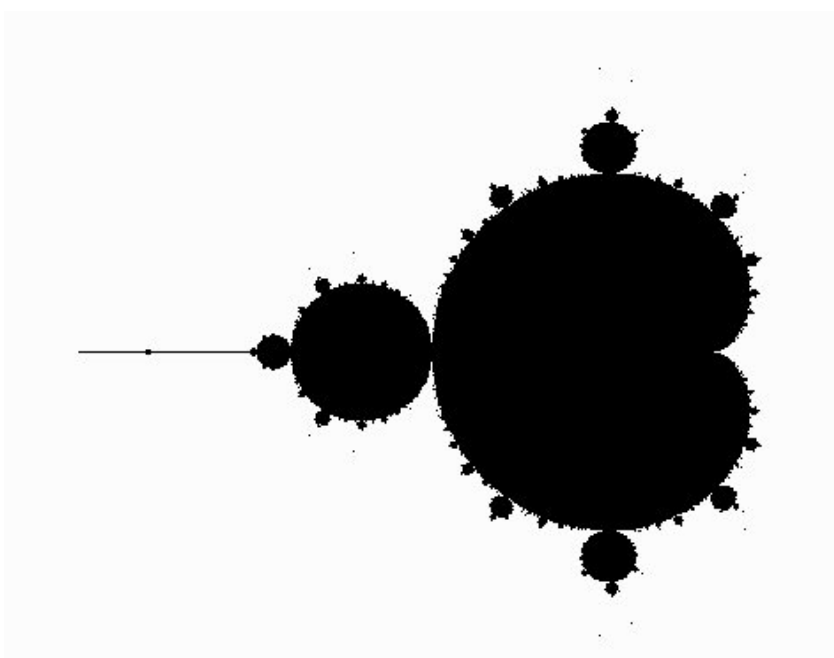
Procedendo in questo modo il perimetro della figura ottenuta, detta **curva di Koch**, tende all'infinito, poiché ad ogni iterazione il perimetro aumenta di un fattore  $4/3$ , ma l'area ha un valore finito ( è comunque minore della circonferenza circoscritta al triangolo di partenza).



Sul finire degli anni 70 un altro matematico **Benoit Mandelbrot** ha ripreso lo studio degli insiemi di Julia cercando di classificarne la ricca varietà.

Per fare ciò ha costruito l'insieme di tutti i punti del parametro  $c$  a cui corrispondono insiemi di Julia connessi. Mandelbrot ha cioè iterato la medesima successione in funzione del parametro  $c$ , variabile in un intervallo rettangolare del piano complesso, fissando  $z(0)=0$ .

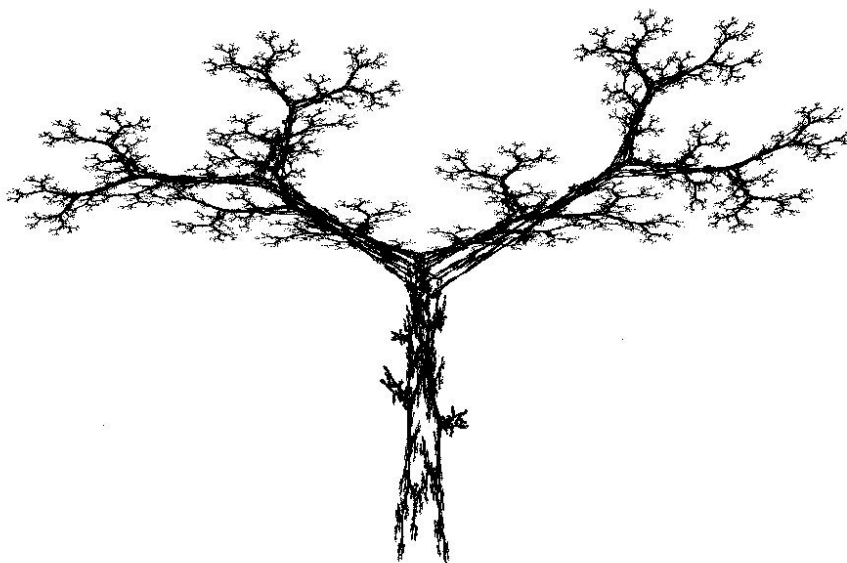
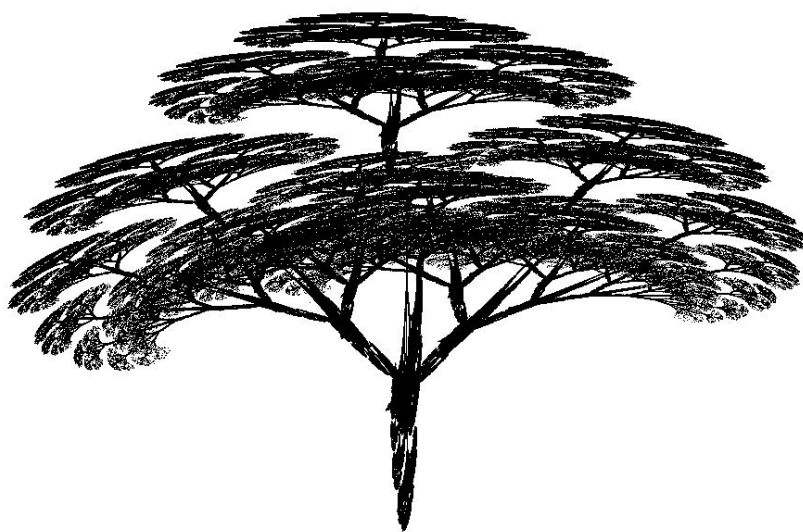
L'insieme ottenuto, detto di Mandelbrot, è l'insieme degli insiemi di Julia connessi.

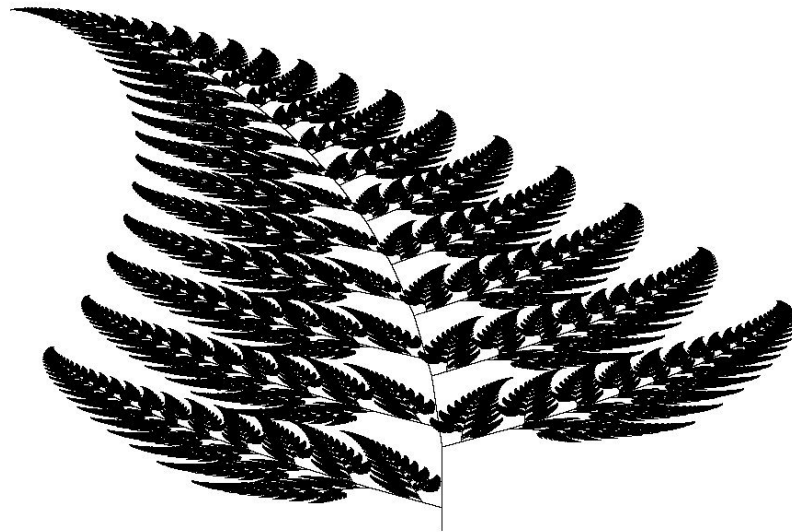


E' stato proprio Mandelbrot che nel 1975 ha coniato il termine "**frattale**" per descrivere questi oggetti fondando una nuova geometria detta appunto frattale che si basa sui principi dell'**interattività** e dell'**autosomiglianza**.

Infatti la caratteristica visiva essenziale di questi oggetti è che si può tagliarne una parte piccola che ingrandita alle dimensioni dell'originale si presenta a volte identica a volte quasi uguale.

Le immagini frattali molto spesso sono molto simili alle strutture naturali ad esempio la linea costiera, le nuvole, alberi, alla struttura delle galassie come si vede dalle seguenti figure





e ciò induce a pensare che la complessità della natura possa essere l'applicazione reiterata di semplici regole.

## 6 Dal classico al complesso

E' opportuno a questo punto un confronto tra i metodi, le tecniche e i paradigmi della scienza classica e la nuova scienza della complessità.

### *Linearità e non linearità.*

Nel mondo delle equazioni lineari si pensa che i sistemi descritti da equazioni semplici si comportano in maniera semplice e quelli descritti da equazioni complicate si comportano in modo complicato.

Nel mondo non lineare semplici equazioni deterministiche abbiamo visto che possono produrre una grande varietà di comportamenti. D'altra parte un comportamento complesso e apparentemente caotico può dare origine a strutture ordinate.

### *Analisi quantitativa e analisi qualitativa.*

L'analisi quantitativa consiste nella possibilità di prevedere in quale punto dello spazio delle fasi passerà in un certo istante la traiettoria che descrive il sistema. Le equazioni non lineari spesso non permettono di fare previsioni esatte anche se sono deterministiche.

Ciò però non significa che la teoria della complessità non permetta di fare previsioni. Un sistema non lineare può possedere molti attrattori sia caotici che non caotici. L'analisi qualitativa di un sistema dinamico consiste nell'identificare gli attrattori e i loro bacini d'attrazione e nel classificarli in base alle loro caratteristiche.

### *Metodo riduzionistico e visione olistica.*

In fisica classica un qualsiasi sistema per quanto complicato può essere scomposto nei "sottosistemi" che lo costituiscono ed ogni sottosistema può essere studiato indipendentemente dagli altri.

Nella scienza della complessità ciò non è più possibile perché le singole parti interagiscono tra di loro e questa interazione causa proprietà nuove che le singole parti non hanno ma che il loro insieme presenta.

Si pensi ad esempio al laser acronimo di light amplification through stimulated emission radiation. Gli atomi emettono luce (fotoni) quando dopo essere stati eccitati, quando cioè i loro elettroni sono stati allontanati dal nucleo e posti su orbite più esterne, si diseccitano e gli elettroni tornano ad orbite più basse. In condizioni normali i vari atomi si diseccitano in tempi diversi con gli elettroni che compiono transizioni su orbite diverse producendo così un fascio di luce incoerente. Sotto determinate condizioni, lontano dall'equilibrio e pompando energia dall'esterno, un'onda luminosa può indurre (stimolare) un atomo eccitato a emettere energia in modo che l'onda venga amplificata e disecciti altri atomi.

In queste condizioni critiche il sistema si autoorganizza e la luce incoerente (frequenze e fasi diverse) emessa da una lampadina diventa coerente; si ha un singolo treno d'onda continuo e monocromatico.

La coerenza è una proprietà nuova non deducibile dagli atomi presenti o dalla lampadina o dalle leggi della riflessione che avviene sugli specchi all'estremità della

cavità. E' in questo senso che il metodo classico non è sufficiente a spiegare il fenomeno ed è necessario adottare una visione olistica.

*Matematica "classica" e geometria frattale.*

Abbiamo visto che gli attrattori strani nello spazio delle fasi presentano un carattere frattale. Ma frattale vuol dire autosomiglianza su scale diverse.

## 7 Legge di potenza

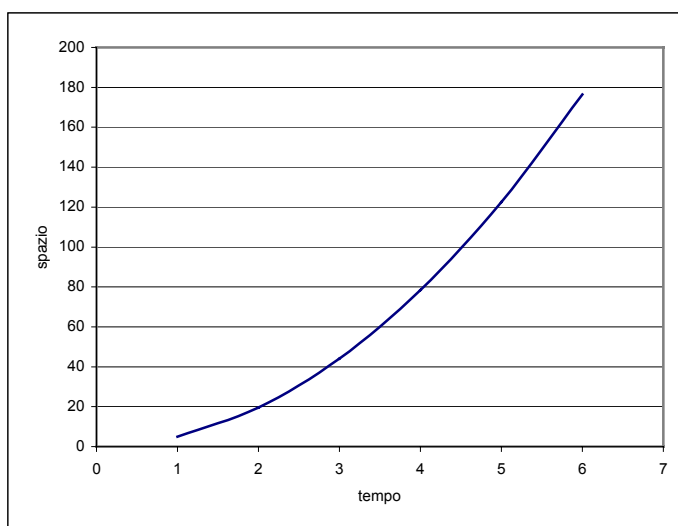
La mancanza di un fattore di scala (free scale) cioè ritrovare le stesse caratteristiche del sistema originario prendendone solo una piccola parte e ingrandendola alle dimensioni dell'originale si può rappresentare anche tracciando una legge di potenza su un diagramma cartesiano in scala logaritmica.

Una legge di potenza è per definizione una funzione di tipo  $y(x) = kx^n$  dove  $k$  e  $n$  sono due costanti reali. Vi sono molte leggi fisiche che sono descritte da questo tipo di legge; ad esempio la legge che lega spazio e tempo di un grave in caduta libera sotto l'azione del campo gravitazionale terrestre è  $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$ .

Supponiamo di aver misurato, a determinati istanti di tempo, la posizione di una massa in caduta libera e di aver ottenuto la seguente tabella

tempo(s)	spazio(m)
1	4,9
2	19,6
3	44,1
4	78,4
5	122,5
6	176,4

tracciamo allora il grafico ponendo sull'asse x il tempo e sull'asse y lo spazio percorso

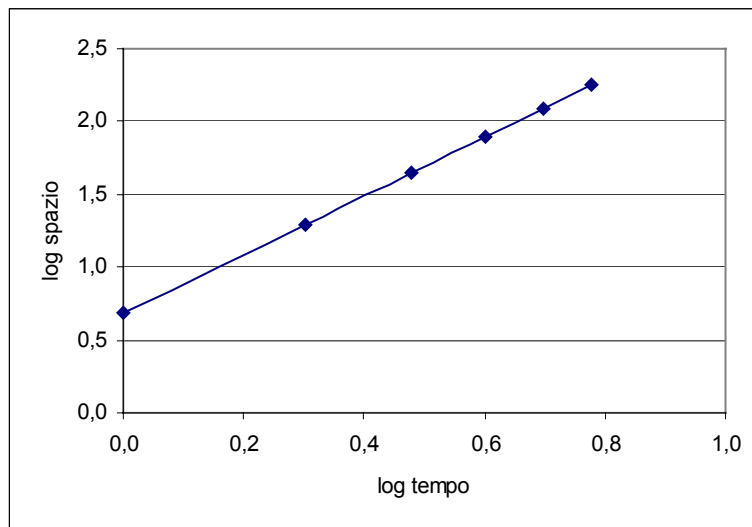


come ci si aspetta si ottiene una parabola.

Calcolando i logaritmi dei dati precedenti otteniamo la nuova tabella

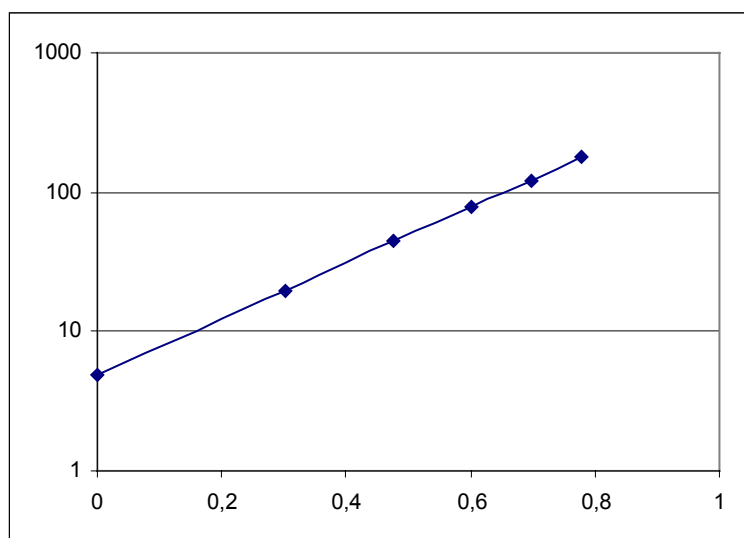
log tempo(s)	log spazio(m)
0,000000	0,69020
0,301030	1,29226
0,477121	1,64444
0,602060	1,89432
0,698970	2,08814
0,778151	2,24650

e il nuovo diagramma che si ottiene



come si vede si è una retta.

Risulta ancora più comodo, invece di calcolare i logaritmi di ogni numero, usare un sistema d'assi tarato in scala logaritmica come il seguente:



La mancanza di scala del grafico ottenuto è concettualmente la stessa mancanza di scala della curva di Koch.

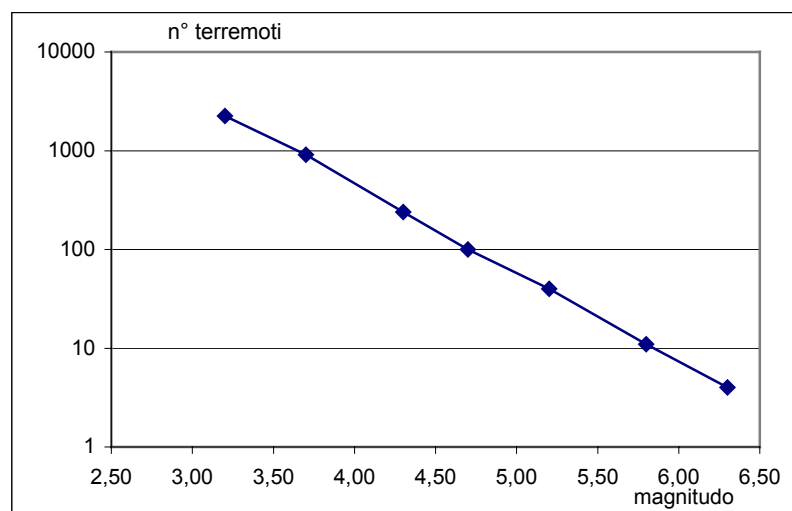
Se ci trovassimo sulla curva di Koch non avremmo modo di conoscere le nostre dimensioni. Il “paesaggio” che vedremmo alle nostre dimensioni reali sarebbe perfettamente uguale a quello che vedremmo se fossimo alti 2cm o 20 m ( il nostro metro è solidale con noi e diventa lungo 1cm nel 1° caso e 10m nel 2° caso).

L'andamento lineare in scala logaritmica ha la stessa proprietà; se ci spostiamo dal punto  $x_0$  al punto  $x_1$  sull'asse  $x$  e misuriamo il rapporto tra i corrispondenti valori  $y_0$  e  $y_1$  troveremo lo stesso valore che se ci spostassimo della stessa distanza da  $x_2$  a  $x_3$  e calcolassimo il rapporto tra  $y_2$  e  $y_3$ .

Nel 1956 due geofisici del Caltech, Gutenberg e Richter, nell'impossibilità di determinare dove e quando avrebbe colpito un terremoto cercarono un metodo per prevedere almeno quale intensità avrebbe avuto cioè quali fossero le sue dimensioni tipiche. In altre parole quali sono i terremoti più comuni.

Analizzando una gran quantità di dati tracciarono un grafico che riporta sull'asse  $y$  il numero di terremoti e sull'asse  $x$  la loro magnitudo, grandezza proporzionale all'energia liberata.

Quello che ottennero è una legge di potenza come si vede dalla seguente figura:



Ciò che si deduce da questa legge empirica è che poiché il numero di terremoti piccoli è legato sistematicamente al numero di quelli grandi, si può ipotizzare che sia gli eventi grandi sia quelli piccoli siano prodotti dallo stesso meccanismo. I terremoti catastrofici non hanno cioè niente di insolito rispetto alle scosse impercettibili e hanno la stessa origine.

E' fondamentale capire che le precedenti conclusioni non si possono trarre da altro modello matematico che la legge di potenza.

## 8 SOC – Self Organized Criticality (criticità auto-organizzata)

Grazie agli esperimenti del fisico danese Per Bak si è scoperto che molti sistemi dinamici naturali, fuori dall'equilibrio, possono **auto-organizzarsi** in uno stato critico governato da una legge di potenza.

L'apparato sperimentale ideato da Bak e altri che permette di comprendere il meccanismo della SOC è costituito da un piatto sul quale vengono fatti cadere uno per volta dei granelli di sabbia. Gradualmente i granelli caduti formano un mucchietto i cui pendii lentamente diventano più ripidi. Ogni tanto quando la pendenza supera un certo valore si formano delle valanghe. Via via che si aggiunge sabbia la dimensione media di queste valanghe aumenta e alcuni granelli finiscono oltre il bordo del piatto. Il mucchietto cessa di crescere quando la quantità di sabbia aggiunta è in media uguale a quella che cade al di fuori del piatto ed è a questo punto che il sistema ha raggiunto lo stato critico.

Aggiungendo anche un solo granello di sabbia al mucchietto che si trova nello stato critico si possono innescare valanghe di qualunque dimensione.

Tracciando un grafico in scala logaritmica in cui si pone sull'asse y il numero di valanghe e sull'asse x la loro dimensione (il numero di granelli coinvolti) si ottiene una retta: ciò vuol dire che il fenomeno è governato da una legge di potenza.

Un'altra effetto importante messo in luce da Bak è che se la forma del mucchietto è tale per cui la pendenza è inferiore a quella critica le valanghe sono più piccole di quelle che si verificano nello stato critico permettendo così alla sabbia di raggiungere lo stato critico. Se la pendenza è superiore a quella critica le valanghe sono più imponenti di quelle allo stato critico facendo crollare il mucchietto di sabbia fino allo stato critico.

I mucchietti supercritici proprio come quelli subcritici sono attratti verso lo stato critico.

Per apprezzare la scoperta che la legge di potenza governa terremoti, valanghe e altri fenomeni che quindi non hanno una dimensione tipica occorre ripensare a quanto siamo abituati a vedere.

Se ad esempio si traccia su un diagramma cartesiano il numero di persone in funzione della loro statura o il numero di uova di gallina in funzione della loro dimensione (peso) si trova una distribuzione a campana detta curva di Gauss dalla quale si evince una statura media (tipica) per gli esseri umani o un peso tipico per le uova.

Non esistono persone alte 1 cm o uova di 1 g, esiste invece una scala alla quale possiamo riferirci.

L'importanza della legge di potenza e quindi la necessità di approfondire le implicazioni ad essa connesse è messa ulteriormente in evidenza da un esperimento condotto da tre fisici danesi nel 1993.

Questi presero delle patate congelate, che quando subiscono un forte impatto si comportano come rocce si rompono cioè in frammenti di varie dimensioni, e le frantumarono.

E' lecito chiedersi allora qual è il peso (dimensione) tipico dei frammenti e per determinarlo si suddividono questi ultimi in mucchietti di pesi diversi e si traccia un grafico nel quale è riportato il numero di frammenti in funzione del loro peso. Anche in questo caso si ottiene una legge di potenza che ci dice che al raddoppiare del peso il numero diminuisce di circa 6 volte con frammenti il cui peso varia da 1hg a 1 mg cioè di 5 ordini di grandezza.

## Complementi

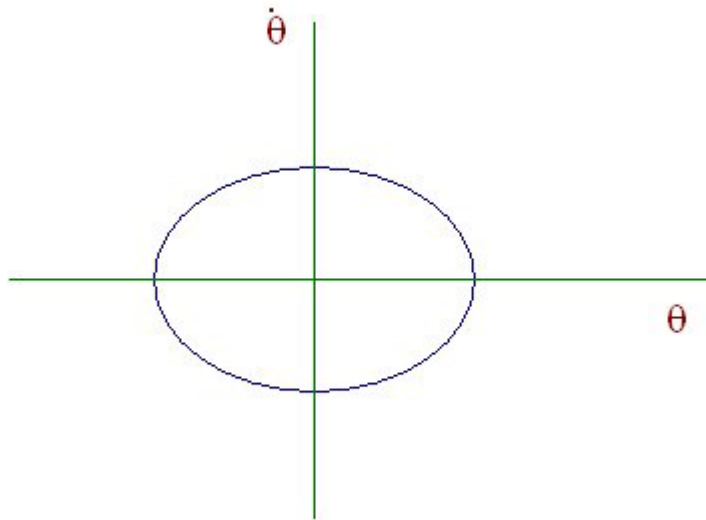
### c1 Spazio delle fasi

Consideriamo un pendolo, in assenza di attrito e per piccole oscillazioni (in modo che l'energia potenziale sia direttamente proporzionale al quadrato della posizione), e consideriamo un diagramma in cui sull'asse  $x$  mettiamo la posizione e sull'asse  $y$  la velocità. Lo spazio bidimensionale ottenuto è detto spazio delle fasi.

Ciò che è di particolare interesse è lo studio della traiettoria che nel caso del pendolo in questione è un'ellisse descritta dall'equazione:

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l g \theta^2$$

dove il 1° termine al 2° membro rappresenta l'energia cinetica e il 2° termine l'energia potenziale.



Traiettoria del pendolo nello spazio delle fasi

Se si considera lo smorzamento dovuto all'attrito la precedente ellisse diventa una spirale con punto finale nell'origine degli assi che corrisponde al termine delle oscillazioni del pendolo.

## c2 Esponenti di Lyapunov

Gli esponenti di Lyapunov permettono di quantificare il livello di caos di un sistema dinamico.

Dall'analisi dei sistemi visti Lyapunov capì che l'impossibilità di stabilirne l'evoluzione, cioè predire lo stato finale, dipende dal fatto che due stati inizialmente vicini (condizioni iniziali simili) tendono a divergere esponenzialmente al passare del tempo.

Siano  $x_0$  e  $x_0'$  due valori della stessa variabile di stato al tempo 0 molto vicini (cioè su orbite diverse ma con punto di partenza molto simile),  $x(t)$  e  $x'(t)$  i valori della stessa variabile di stato al tempo  $t$  sulle due orbite allora:

$$|x(t) - x'(t)| \approx (x_0 - x_0') e^{\lambda t}$$

dove  $\lambda$  è l'esponente di Lyapunov.

Si vede che incrementando  $t$  di un fattore 10 per mantenere costante la differenza tra gli stati bisogna ridurre  $(x_0 - x_0')$  di un fattore  $e^{10} \approx 10^4$ ; ciò vuol dire conoscere con una precisione 10.000 volte maggiore gli stati iniziali.

Infatti  $(x_0 - x_0')$  può essere interpretata come l'incertezza con cui si conosce lo stato iniziale  $x_0$  e quindi  $|x(t) - x'(t)|$  rappresenta l'indeterminazione sullo stato al tempo  $t$ .

## Bibliografia

- P. Bak K. Chen – *La criticità autorganizzata* – Le Scienze n. 271  
C.S. Beruglia F. Vaio - *Non linearità, caos, complessità* – Ed. Bollati-Boringhieri  
M. Buchanan – *Ubiquità* – Ed. Mondadori  
F. Capra - *La rete della vita* - Ed. BUR  
F. Caruso – *Multifrattalità e modelli di criticità autorganizzata* – Scuola Superiore di Catania  
L. Chua – *Chua's circuit* – Caltech  
G. Degasperi L. Erzegovesi – *I mercati finanziari come sistemi complessi* – Alea  
M. Gell-Mann – *Il quark e il giaguaro* – Ed. Boringhieri  
J. Gleick – *Caos* – Ed. BUR  
L. Laval – *Circuit chaotique de Chua* – Laboratoire de Robotique de Paris  
C. Piccardi – *Come appare il caos deterministico* – Politecnico di Milano  
A. Rapisarda V. Latora – *Dinamica dei sistemi non lineari* – Scuola Superiore di Catania